ISARA Lyon Durée 1h

UP SFO- S4 – UE : Statistique

Examen N°3 (25%) partie 7–juin 2012

Mme Bottollier Lemallaz CORRIGE EN BLEU

Conditions d’examen : **Documents**: Tables statistiques autorisées

**Calculatrice** : non programmable

Remarques importantes :

1. A la fin de l’épreuve vous devez rendre les 4 pages du sujet complétées de façon lisible et propre.
2. Sauf indication contraire, vous présenterez les résultats finaux avec 3 chiffres significatifs.

**Nom :……………………………………………………………….Prénom :……………………………………………….Note sur 20 :……….**

**Evaluation du cours (6 points) (15 min):**

1. Formule du calcul des coefficients d’un modèle de régression linéaire multiple :

B = (U’U)-1 U’Y ……………………………………………….

1. Formule du calcul de la matrice des variances-covariances : VarB = CMe (U’U)-1……
2. Soit un modèle de régression linéaire multiple du 1er degré à k facteurs (j = 1 à k) établi à partir de n essais (i = 1 à n) expliciter la matrice d’information associée à ce modèle : dimension et termes qui la constituent en respectant la notation indicielle.

Modèle : i = 0 + 1 Ui1 + 2 Ui2 +....+ j Uij +.....+ k Uik ……………………………………………….

Dimension : Dim U’U = [k+1 ; k+1] ……………………………………………….

Termes :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | ΣU1 | ΣU2 | ..... | ΣUj | ..... | ΣUk |
| ΣU1 | ΣU1² | ΣU1 U2 | …. | Σ U1Uj | …. | ΣU1 Uk |
| ΣU2 | ΣU2 U1 | ΣU2² | …. | Σ U2Uj | …. | ΣU2 Uk |
| …. | …. | …. | …. | …. | …. | …. |
| ΣUj | ΣUj U1 | ΣUj U2 | …. | ΣUj² | …. | Σ Uj Uk |
| …. | …. | …. | …. | …. | …. | …. |
| ΣUk | ΣUk U1 | ΣUk U2 | …. | ΣUk Uj | …. | ΣUk² |

**Exercice 1 (6 points) (15 min) :**

But de l’étude

Mise au point d’un nouveau catalyseur pour la production d’un polymère biodégradable

Facteurs

U1 : Durée de réaction (0.5 ; 1.5) heures codées X1 (-1 ; +1)

U2 : Quantité de catalyseur (3 ; 5) % codées X2(-1 ; +1)

U3 : Type de catalyseur (C1 ; C2) codées X3 (-1 ; +1)

La matrice expérimentale est identique à celle de l’exercice 2, mais la réponse mesurée est différente.

Réponse Y: quantité de produit perdu en grammes à minimiser

Modèle en variables codées calculé et retenu par les auteurs : Y^ = 60 + 10 X1 + 12 X2 – 15 X3

Ils estiment la variance résiduelle égale à 14.

1. Tester la significativité de l’effet du facteur « Durée de la réaction ». Hypothèses, conclusion.

H0 : beta 1 = 0

H1: beta 1 différent de 0 (effet du facteur)

La matrice de dispersion est symétrique, elle est constituée de 1/8 = 0,125 dans la diagonale et de 0 de part et d’autre de la diagonale.

VarB = CMe (U’U)-1 = 14 (X’X)-1 donc variance de chaque bj = 14/8

|  |  |
| --- | --- |
| sigma b | = racine (14/8) = 1,32 |
| t calc | = 10/1,32 = 7,56 |
|  |  |

t0,995 (4) < t calc < t 0,995 (4)

0,001 <alpha < 0,01

L’effet du facteur X1 est très significatif (\*\*).

1. Donner un intervalle d’estimation pour  = 0.10 de l’effet du facteur « Durée de la réaction », interprétation.

P( 10- 2.132\*1.32<1<10- 2.132\*1.32) = 0.90

P( 7.18<1<12.81) = 0.90

Quand on augmente la durée de réaction de 0.5h, il y a 10% de risque que la quantité de produit perdu ne soit pas comprise entre 7.18 et 12.81 grammes

1. A quel niveau fixeriez-vous les 3 facteurs pour répondre au problème posé ?

On veut minimiser Y :

b1 >0 donc X1 à -1donc durée de réaction 0.5 heures

b2 >0 donc X2 à -1 quantité de catalyseur 3 %

b3 <0 donc X3 à +1 type de catalyseur C2

**Exercice 2 (8 points) (25 min) :**

But de l’étude

Mise au point d’un nouveau catalyseur pour la production d’un polymère biodégradable

Facteurs

U1 : Durée de réaction (0.5 ; 1.5) heures codées X1 (-1 ; +1)

U2 : Quantité de catalyseur (3 ; 5) % codées X2(-1 ; +1)

U3 : Type de catalyseur (C1 ; C2) codées X3 (-1 ; +1)

Réponse Y: rendement de la réaction (%) à maximiser

1. Compléter le tableau ci-dessous : (il faut calculer b0 en premier)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Essai N° | X1 | X2 | X3 | Yi | Y^i | ei |
| 1 | -1 | -1 | 1 | 33 | 33,50 | -0,50 |
| 2 | -1 | -1 | 1 | 34 | 33,50 | 0,50 |
| 3 | 1 | -1 | -1 | 63 | 63,50 | -0,50 |
| 4 | 1 | -1 | -1 | 64 | 63,50 | 0,50 |
| 5 | -1 | 1 | -1 | 35 | 55,50 | -20,50 |
| 6 | -1 | 1 | -1 | 76 | 55,50 | 20,50 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 84 | 84,50 | -0,50 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 85 | 84,50 | 0,50 |
| **bj** | **14,750** | **10,750** | **-0,250** |  |  |  |
| somme | 0 | 0 | 0 | 474 | 474 | 0 |
| somme des carrés | 8 | 8 | 8 | 31592 | 30750 | 842 |
| SCE |  |  |  | 3507,50 | 2665,50 | 842 |

SCE Y = 31592 – 8\*(474/8)² = 3507,50

SCE Y^= 30750 – 8\*(474/8)² = 2665,50

SCEe = SCe = 3507,50 - 2665,50 = 842

1. Calculer b0 et écrivez l’équation du modèle obtenu avec les valeurs numériques.

b0 = 474/8 = 59,25

b1, b2 et b3 sont donnés dans le tableau ci-dessus donc :

Y^ = 59,25 + 14,75 X1 + 10,75 X2 – 0,25 X3

Ce modèle permet de compléter le tableau ci-dessus.

1. Interprétation concrète de b1

Quand la durée de la réaction augmente de 0,5h le rendement de la réaction augmente de 14,75%

1. Tester la validité du modèle. Hypothèses et conclusion, on sait que la p-value est égale à 0,099.

H0 : CM  / CM e = 1

H1 : CM  / CM e >1 le modèle est satisfaisant (test unilatéral)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Variation | SCE | ddl | CM | F calc |
| Régression | 2665,5 | 3 | 888,50 | 4,22 |
| Résiduelle | 842 | 4 | 210,50 |  |
| Totale | 3507,5 | 7 |  |  |

Conclusion : Si on rejette H0 on a 9,9% de risque d’erreur, ce risque est > à 5%, on conserve l’hypothèse H0 , on n’a pas pu mettre en évidence que le modèle était satisfaisant.